

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants justifier la continuité de la fonction f en a :

a)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & ; (a=0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} - 2 & \text{si } x \neq 3; (a=5) \\ f(3) = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0; (a=0) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2 - (x-1)^4}}{x-1} & \text{si } x \in]1,2] \\ f(x) = |x| & \text{si } x \in]-\infty,1[\end{cases}; (a=1)$$

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f sur son domaine de définition :

a)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{-|x|^3 + x^2}{x+1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ f(x) = \frac{1-x^2}{1-x^3} & \text{si } x \in [-1,1[\end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-x-6}-x & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants la fonction f est elle prolongeable par continuité en x_0 ? Si oui définir ce prolongement.

a) $f : x \mapsto \frac{|x|-3}{x^2+3x}; x_0 = -3$

b) $f : x \mapsto \frac{x}{x+|x|}; x_0 = 0$

d) $f : x \mapsto \frac{x^2+x-2}{x^2-1}; x_0 = 1$

e) $f : x \mapsto \frac{8x^3-1}{x-|x-1|}; x_0 = \frac{1}{2}$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1}-3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 Montrer que f est continue en 1

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} & \text{si } x \neq 3. \\ f(3) = a & (a \text{ réel donné}). \end{cases}$$
 Déterminer a pour que f soit continue en 3.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie par $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{x}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f.
- Montrer que f est continue en tout réel non nul.

3) a) Montrer que pour tout réel x non nul $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}-x+1}$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 7 : Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{5+4x}-2x-1}{x-x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = m & (\text{où } m \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- Déterminer D_f .
- Déterminer m pour que f soit continue en 0.
- Donner alors suivant les valeurs de m, le domaine de continuité de f
- Soit g la fonction définie par $g(x) = (x-1)^2 \cdot f(x)$ Etudier la continuité de g en 1.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2-|x|}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f.
- Peut-on parler de la continuité de f en 0 ?
- Vérifier que f est continue à droite en 1 et continue à gauche en (-1).

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2+4x+1}{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ f(x) = x^2+x+1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ f(x) = 2\sqrt{x^2-1}-x+4 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

- Montrer que f est continue en 1.
- f est-elle continue en -1.
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.



Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\\ f(x) = x^2 + x + 1 & \text{si } x \in [-1, -1] \\ f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x + 4 & \text{si } x \in]-1, +\infty[\end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 1.
- 2) f est-elle continue en -1.
- 3) Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) Soit g la fonction définie par $g(x) = |x| \cdot f(x)$ Montrer que g est continue en 0.

Exercice 8 :

Soit la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + ax & \text{si } x \leq -2 \quad (\text{a est un paramètre réel}) \\ f(x) = \frac{x+1}{x} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est continue en 2.
- 3) Déterminer le réel a pour que f soit continue en -2.
- 4) On prend dans la suite $a = \frac{1}{4}$. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.